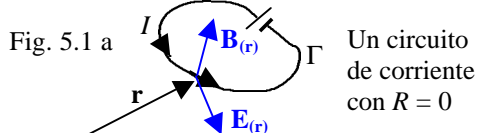


# Capítulo 5. Energía Magnética.

## 5.1 Relación entre trabajo Eléctrico y flujo magnético en un circuito estático.

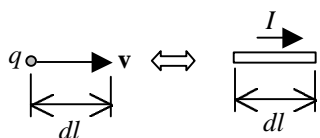


En el circuito  $\Gamma$  de la figura la fuente de *fem* efectúa un trabajo para mantener la corriente  $I$ . Desde el punto de vista de la teoría de campos electromagnéticos cada partícula de carga ( $q$ ) está sometida a la fuerza electromagnética:  $\mathbf{F}_q = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , donde  $\mathbf{v}$  es la velocidad. Para que ésta sea constante, la fuente de *fem* debe producir una fuerza de igual magnitud y sentido opuesto, de tal manera que en un desplazamiento  $d\mathbf{l}$  aquella efectúa el trabajo.

$$dW_q = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \text{ sobre cada portador}$$

$$dW_q = -q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v} dt) = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt$$

Fig. 5.11 b Relación entre carga móvil y elemento de corriente unifilar



$$q\mathbf{v} \leftrightarrow Id\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{J}_s dS \leftrightarrow \mathbf{J}dV$$

$$dW_q = -I\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} dt, \text{ sobre cada elemento de longitud}$$

en  $\Gamma$ . Para hallar el trabajo total desarrollado por la fuente de *fem* en toda la longitud del circuito:

$$W_q = \oint_{\Gamma} (-I dt \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -I dt \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$dW_q = (Idt) \left( \frac{d\Phi_m}{dt} \right) = Id\Phi_m \tag{5.1}a$$

Expresión diferencial que relaciona el flujo magnético con el trabajo eléctrico. Como el circuito no posee  $R$  tal trabajo queda almacenado en el campo magnético debido a  $I$  (proceso reversible) y podemos escribir:

$$dW_q = Id\Phi_m = \underbrace{dU_m}_{\text{diferencial de energía magnética}} \tag{5.1} b$$

El flujo magnético es el total (Concatenado) :

$$dU_m = Id\Lambda \tag{5.1} c$$

### Ejemplo 5.1:

Energía magnética de un circuito en función de la auto-inductancia.

Sabemos que:  $\mathbf{I} = LI \quad d\mathbf{l} = LdI$

De la ec. (5.1)c:  $dU_m = Id\Lambda = LI dI$

$$U_m = L \int_{I=0}^{I^f} IdI = L \left( \frac{I^2}{2} \right)_{I=0}^{I^f} = \frac{L}{2} (I^f)^2$$

donde  $I^f$  es el valor final de la corriente.

$$\text{Como el proceso es reversible: } U_m = \frac{L}{2} (I^f)^2 \tag{5.2}$$

### Ejemplo 5.2:

Energía magnética de dos circuitos estáticos:



$dU_m = Id\Lambda$  siendo necesario usar el  $\mathbf{I}_{total}$ . Asumiendo que las corrientes tienen valores nulos y finales  $I_1^f$  e  $I_2^f$ . Del principio de superposición:

$$dU_m = \sum_{i=1}^2 I_i d\Lambda_i \quad d\Lambda_i = \sum_{j=1}^2 d\Lambda_{ij}$$

$$d\Lambda_1 = d\Lambda_{11} + d\Lambda_{12} = L_1 dI_1 + M dI_2$$

$$\text{también: } d\Lambda_2 = M dI_1 + L_2 dI_2$$

Reemplazando:

$$U_m = L_1 I_1 dI_1 + M I_1 dI_2 + M I_2 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 \dots (i)$$

La energía total no depende del proceso por el cual las corrientes alcanzan sus valores finales. Se calcula la energía magnética usando 2 métodos:

a) Variación independientes de las corrientes:

$$I_2 = 0 \quad I_1 = a I_1^f \quad (0 < a < 1)$$

Sea:

$$dI_2 = 0 \quad dI_1 = I_1^f da$$

$$dU_{m1} = L_1 (a I_1^f) (I_1^f da)$$

En (i):

$$U_{m1} = L_1 (I_1^f)^2 \int_{a=0}^1 a da = \frac{L_1}{2} (I_1^f)^2$$

Ahora:

$$I_1 = I_1^f \quad I_2 = a I_2^f$$

$$dI_1 = 0 \quad dI_2 = I_2^f da$$

$$\text{En (i): } dU_{m2} = M I_1^f I_2^f da + a I_2^f L_2 I_2^f da$$

$$U_{m2} = M I_1^f I_2^f \int_{a=0}^1 da + L_2 (I_2^f)^2 \int_{a=0}^1 a da$$

$$U_{m2} = M I_1^f I_2^f + \frac{L_2}{2} (I_2^f)^2$$

$$\text{Total: } U_m = U_{m1} + U_{m2}$$

$$U_m = \frac{L_1}{2} (I_1^f)^2 + \frac{L_2}{2} (I_2^f)^2 + M (I_1^f) (I_2^f) \tag{5.3}$$

Nota: para el análisis en el estado estacionario no es usual escribir el superíndice  $f$  en (5.2) y (5.3)

b) Variación en concordancia de las corrientes:

$$I_1 = a I_1^f \quad I_2 = a I_2^f \quad dI_1 = I_1^f da \quad dI_2 = I_2^f da$$

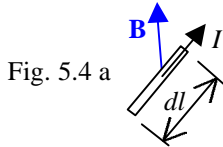
En (i):

$$dU_m = L_1 a I_1^f I_1^f da + M a I_1^f I_2^f da + M a I_2^f I_1^f da + L_2 a I_2^f I_2^f da$$

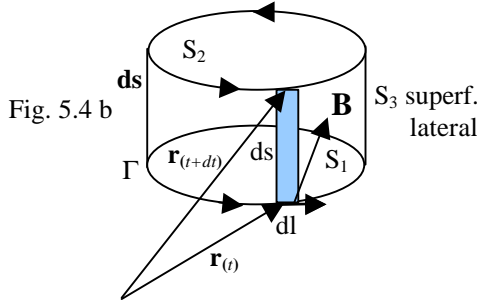
$$U_m = \frac{L_1}{2} (I_1^f)^2 + M (I_1^f)(I_2^f) + \frac{L_2}{2} (I_2^f)^2$$

que coincide con (5.3)

**5.2 Relación entre trabajo mecánico y flujo magnético en un circuito móvil:**



Conocemos la fuerza E.M. sobre el elemento de corriente unifilar:  $\mathbf{F} = I \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$ , para que este elemento pueda desplazarse en el espacio a velocidad constante se requiere una fuerza mecánica:  $\mathbf{F}_{mec} = -I \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$   
 Si el elemento se desplaza  $d\mathbf{s}$  luego el trabajo mecánico es:  $dW_{mec} = -I \mathbf{dl} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$



El circuito  $\Gamma$  efectúa un desplazamiento  $d\mathbf{s}$  en el Intervalo  $dt$ . Observamos:  $d\mathbf{s}_3 = d\mathbf{l} \times d\mathbf{s}$   
 Sobre cada  $d\mathbf{l}$  se efectúa el trabajo mecánico:  
 $dW_{dl} = -I \mathbf{dl} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \times d\mathbf{s} = I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3$

Para todo  $\Gamma$ :  $\int_{\Gamma} dW_{dl} = dW_{mec} = \int_{S_3} I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3$

Esta integral se calcula como en (4.2.2):  
 En  $(t+dt)$ :  

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3 - \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_1 + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3$$

$$0 = d\Phi_m + \int_{S_3} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3$$

$$\int_{S_3} I \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_3 = dW_{mec} = -Id\Phi_m$$

$$dW_{mec} = -Id\Lambda \tag{5.4}$$

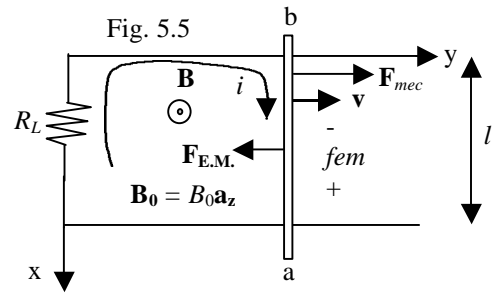
Si el sistema es reversible, este trabajo queda almacenado como energía potencial.

**Ejemplo 5.3:**

Trabajo mecánico y flujo magnético para el generador lineal (4.3.2)

$$\mathbf{F}_{E.M.} = i l \mathbf{a}_x \times B_0 \mathbf{a}_z = -i l B_0 \mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{F}_{mec} = i l B_0 \mathbf{a}_y$$



$$\mathbf{F}_{E.M.} = i l \mathbf{a}_x \times B_0 \mathbf{a}_z = -i l B_0 \mathbf{a}_y \quad \mathbf{F}_{mec} = i l B_0 \mathbf{a}_y$$

El trabajo mecánico de esta fuerza:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = i l B_0 \mathbf{a}_y \cdot dy \mathbf{a}_y = i l B_0 dy$$

El  $\Phi_m$  es:

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_0 \mathbf{a}_z \cdot (-y l \mathbf{a}_z) = -B_0 y l$$

$$d\Phi_m = -B_0 l dy$$

$$i d\Phi_m = -i l B_0 l dy = -dW_{mec} \text{ según la ec. (5.4)}$$

**5.3 Flujo Magnético, energía almacenada y trabajo desarrollado por un circuito:**

La ec. (5.4) no toma en cuenta el trabajo eléctrico para mantener la corriente I; en el ejemplo 5.3 se expresa por la omisión de la autoinductancia del circuito. En general, el trabajo eléctrico de las fuentes independientes en parte se convierte en trabajo desarrollado por el circuito y en parte se almacena como energía magnética; un ejemplo concreto son los motores.

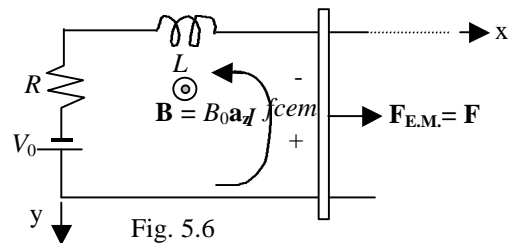
$$dW_b = dU_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{5.5a}$$

$$Id\Lambda = dU_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \tag{5.5b}$$

donde:  $\mathbf{F}$  es la fuerza E.M. y  $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + Id\Lambda$

**Ejemplo 5.4:**

Aplicación de la ec. (5.5) al motor lineal (4.3.4)



$$\mathbf{F} = i l B_0 \mathbf{a}_y \quad \Lambda_{total} = \Lambda_{mutuo} + \Lambda_{propio}$$

$$\Lambda = B_0 \mathbf{a}_z \cdot (y l \mathbf{a}_z) + L I = B_0 l y + L I$$

$$d\Lambda = B_0 l dy + L dI$$

$$Id\Lambda = I B_0 l dy + L I dI = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + dU_m$$

si despreciamos R:  $dW_b = Id\Lambda$

$$\text{incluyendo R: } dW_b = I^2 R dt + Id\Lambda$$

Hallaremos la energía total eléctrica entregada por la fuente (se asumirá que  $f_r = 0$  y  $L = 0$ ) :

$$I = \frac{V_0}{R} \exp\left[-\frac{(B_0 l)^2}{mR} t\right]$$

$$W_b = \int_{t=0}^{\infty} V_0 I dt = \frac{V_0^2}{R} \int_{t=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{(B_0 l)^2}{mR} t\right] dt =$$

$$= \frac{V_0^2 m}{(B_0 l)^2} = m \left(\frac{V_0}{B_0 l}\right)^2$$

la energía cinética final de la barra  $\overline{ab}$  es:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{B_0 l}\right)^2$$

y la conversión de energía eléctrica en calor:

$$\int_{t=0}^{\infty} I^2 R dt = \frac{V_0^2}{R} \int_{t=0}^{\infty} \exp\left[-\frac{2(B_0 l)^2}{mR} t\right] dt = \frac{m}{2} \left(\frac{V_0}{B_0 l}\right)^2$$

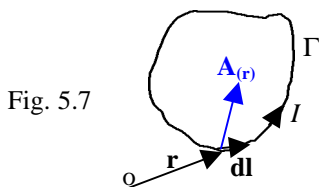
Se cumple la ley de conservación de la energía.

### 5.4 La energía magnética en términos de los vectores de campo:

Las secciones anteriores tratan la energía magnética como si ella estuviese concentrada en las corrientes; aquí se tratará de conceptualizar la energía magnética asociada con los vectores de campo y distribuida en el espacio.

#### 5.4.1: La $U_m$ y $\mathbf{A}$ :

Sea un circuito con corriente estacionaria  $I$ , de la ec. (5.2):



$$U_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{(LI)I}{2} = \frac{\Phi_m I}{2}$$

De la ec. (1.13):  $U_m = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} I = \frac{I}{2} \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$  (5.6)a

Recordando las relaciones para elementos de corriente:

$$q\mathbf{v} \leftrightarrow I d\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{J}_s dS \leftrightarrow \mathbf{J} dV$$

y puede probarse las siguientes relaciones:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_S \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{A} dS \tag{5.6)b}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \tag{5.6)c}$$

#### Ejemplo 5.5:

Un solenoide infinito ideal (ver ejemplo 1.6)

$$\mathbf{J}_s = nI \mathbf{a}_{\hat{\phi}}$$

$$\mathbf{A} \Big|_{r=a} = \frac{1}{2} \mathbf{m}_0 n I a \mathbf{a}_{\hat{\phi}}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{z=0}^l (nI \mathbf{a}_{\hat{\phi}}) \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{m}_0 n I a \mathbf{a}_{\hat{\phi}}\right) (2\pi a dz)$$

energía en un segmento de longitud "l".

$$U_m = \frac{1}{2} \mathbf{m}_0 (nI)^2 (\pi a^2) l$$

energía por unidad de longitud:

$$\frac{U_m}{l} = \frac{1}{2} \mathbf{m}_0 (nI)^2 (\pi a^2)$$

evaluando la inductancia por unidad de longitud:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{L}{l}\right) I^2 = \frac{1}{2} \mathbf{m}_0 (nI)^2 (\pi a^2)$$

$$\left(\frac{L}{l}\right) = \mathbf{m}_0 n (\pi a^2) \text{ en H/m}$$

#### 5.4.2 $U_m$ , $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ :

Para hallar esta relación partiremos de la ec. (5.6)c, recordando que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} dV$$

Por identidad vectorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$= \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})$$

Reemplazando:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dV$$

Por el teorema de Gauss:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV - \frac{1}{2} \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S}$$

Sí se extiende V hasta que sea "todo el espacio", S está en el infinito:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{H}| \sim \frac{1}{R^3} \quad |d\mathbf{S}| \sim R^2 \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{H}| |d\mathbf{S}| \sim \frac{1}{R}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

luego:  $U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dV$  (ene todo el espacio) (5.7)a

El desarrollo utilizado asume un medio lineal; luego:

$$\mathbf{B} = \mathbf{mH} \quad \rightarrow \quad U_m = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mathbf{m}} dV \tag{5.7)b}$$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{mH}^2 dV \tag{5.7)c}$$

Una interpretación de las ec. (5.7) es que la energía está distribuida en todo el volumen del espacio con

$$\text{densidad: } \frac{U_m}{dV} = u_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \tag{5.8}$$

#### Ejemplo 5.4.3:

Repetir el ejemplo 5.5, se sabe que  $\mathbf{B} = \mathbf{m}_0 n I \mathbf{a}_z$

Luego:  $u_m = \frac{B^2}{2\mathbf{m}_0} = \frac{\mathbf{m}_0 (nI)^2}{2}$

$$U_m = \int_V u_m dV = \int_V \frac{\mathbf{m}_0(nI)^2}{2} dV = \frac{\mathbf{m}_0(nI)^2}{2} (\mathbf{p}a^2)l$$

por unidad de longitud:  $\left(\frac{U_m}{l}\right) = \frac{\mathbf{m}_0(nI)^2}{2} (\mathbf{p}a^2)$

### 5.4.3 Cálculo de L usando el método de la energía:

El concepto de las ec. (5.7) permite hallar L de un sistema en el cual se conoce **H** y **B** en todas partes.

#### Ejemplo 5.7:

Inductancia por unidad de longitud para una línea coaxial.

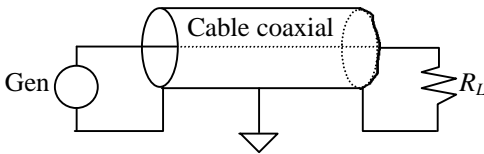
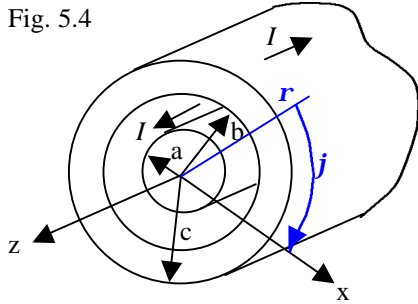


Fig. 5.4



La longitud es "l", conductor de cobre, con  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$

i) Para:

$$0 < r < a: \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{m}_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$2\pi r B = \mathbf{m}_0 I \left(\frac{\pi r^2}{\pi a^2}\right) \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}_0 I r}{2\pi a^2} \mathbf{a}_\phi \quad u_{m_1} = \frac{\mathbf{m}_0 (I r)^2}{8(\pi a^2)^2}$$

$$U_{m_1} = \int_{r=0}^a u_{m_1} (2\pi r dr)(l) = \frac{\mathbf{m}_0 I^2}{16\pi}$$

ii) Para:  $a < r < b$   $\mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}_0 I}{2\pi r} \mathbf{a}_\phi$   $u_{m_2} = \frac{\mathbf{m}_0 I^2}{8(\pi r)^2}$

$$U_{m_2} = \int_{r=a}^b u_{m_2} (2\pi r dr)(l) = \frac{\mathbf{m}_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

iii) Para:  $b < r < c$   $\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{m}_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{m}_0 I \left[ \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right]$$

$$\therefore \mathbf{B} = \frac{\mathbf{m}_0 I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left[ \frac{c^2}{r} - r \right] \mathbf{a}_\phi$$

$$u_{m_3} = \frac{\mathbf{m}_0 I^2}{8\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left[ \frac{c^4}{r^2} - 2c^2 + r^2 \right]$$

$$U_{m_3} = \frac{\mathbf{m}_0 I^2}{4\pi^2(c^2 - b^2)^2} \left[ c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right]$$

iv) Para  $r > c$   $\mathbf{B} = 0$   $U_{m_4} = 0$

Energía total:  $U_m = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3} + U_{m_4}$

También:  $U_m = \frac{LI^2}{2}$

Luego:  $L = \frac{2U_m}{I^2}$

$$L = \mathbf{m}_0 l \left\{ \frac{1}{8\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2\pi(c^2 - b^2)^2} \left[ c^4 \ln \frac{c}{b} - \frac{1}{4}(c^2 - b^2)(3c^2 - b^2) \right] \right\}$$

Sí  $l = 1$  obtenemos L por unidad de longitud en H/m

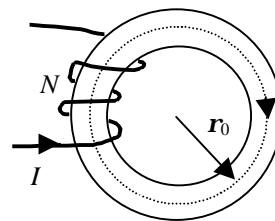
El término central:  $\frac{\mathbf{m}_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ , asociado con el  $\Phi_m$

eterno a los conductores se llama "inductancia externa". La inductancia interna de un conductor cilíndrico

de radio "a" es:  $L = \frac{\mathbf{m}_0 l}{8\pi}$  Henrys ó  $\frac{L}{l} = \frac{\mathbf{m}_0}{8\pi}$  H/m

### 5.5 Energía Magnética y curva de Histéresis:

Del capítulo 2 recordamos el anillo de Rowland:



$r_0$  = radio medio  
S: sección recta

Fig. 5.10 a

Por la ec. (5.1)b:  $dW_b = Id\Lambda = NId\Phi_m$   
(Trabajo eléctrico efectuado por la fuente)

Sabemos:  $H = \frac{NI}{2\pi r}$   $d\Phi_m = SdB$

Reemplazando:

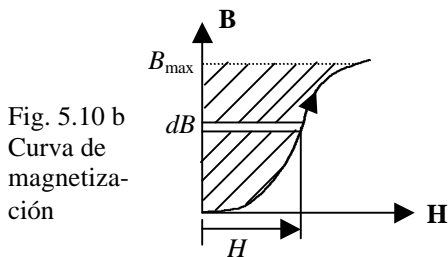
$$dW_b = (2\pi r_0 H)(SdB) = 2\pi r_0 SHdB$$

Observamos que:  $2\pi r_0 S = V$  (volumen del anillo)

Luego:  $dW_b = VHdB$

Sí I aumenta desde 0 hasta alcanzar la saturación el

trabajo total eléctrico es:  $W_b = V \int_{B=0}^{B_{max}} HdB$



Este trabajo es igual a la  $U_m$ ; entonces:

$$u_m = \frac{U_m}{dV} = \int_{B=0}^{B_{max}} HdB \quad (5.9)$$

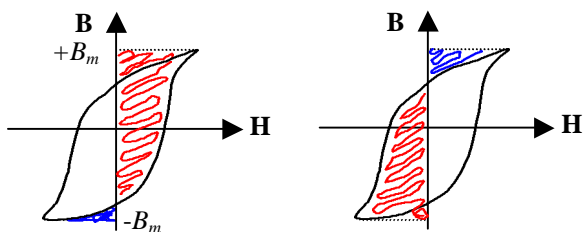
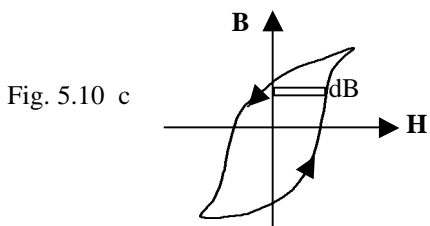
densidad de energía magnética.

Obsérvese que si el material es lineal, entonces:

$$H = \frac{B}{m} \text{ y se obtiene la ec. 5.8}$$

Si la corriente es alterna, entonces el área del lazo de histéresis es el  $W_b$  neto por unidad de volumen:

$$w_b = \frac{W_b}{V} = \oint HdB \quad (5.10)$$



Al final de un ciclo completo el estado magnético del material es el mismo que al principio; luego la energía magnética es la misma; entonces la ec. 5.10 representa una pérdida de energía que aparece como calor por unidad de volumen y por ciclo de la corriente alterna.

### 5.5.1 Ecuación de Steinmetz:

Es una fórmula empírica que da la potencia perdida como calor en watt por unidad de volumen:

$$hfB_{max}^{1.6} \text{ en W/m}^3$$

Rango:  $1000G < B_{max} < 15000G$

$\eta = 0.001$  (acero al silicio) Silicon Steel

$= 0.002 - 0.004$  (Feee dulce) Soft Iron

$= 0.03$  (acero moldeado) Hard Cast Steel

### 5.6 Cálculo de Fuerzas y Torques por el método de la energía:

Este cálculo se basa en la ec. 5.5b:

$$Id\Lambda = dU_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

sea el caso de un circuito unifilar; de 5.4.1 sabemos:

$$U_m = \frac{\Phi_m I}{2} = \frac{\Lambda I}{2} \text{ luego: } dU_m = \frac{Id\Lambda}{2}$$

que se interpreta como el cambio en la energía para mantener I cte., para lo cual la fuente externa efectúa el trabajo diferencial  $dW_b$ , reemplazando:

$$dW_b = 2dU_m = dU_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = dU_m = \nabla U_m \cdot d\mathbf{S}$$

$$\therefore \mathbf{F} = +\nabla U_m \Big|_{I=cte} \quad (5.11)a$$

Esta ec. Permite calcular la fuerza magnética sobre un circuito si se expresa  $U_m$  como una función de una variable adecuada (ver ejemplos). Si el circuito está dispuesto de tal forma que pueda rotar, entonces:

$$\tau = \frac{\partial U_m}{\partial q} \Big|_{I=cte} \quad (5.11)b$$

El procedimiento puede extenderse a cualquier sistema magnético lineal; si tal sistema no contiene fuentes de fem externas:

$$dW_b = 0 = Id\Lambda = dU_m + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

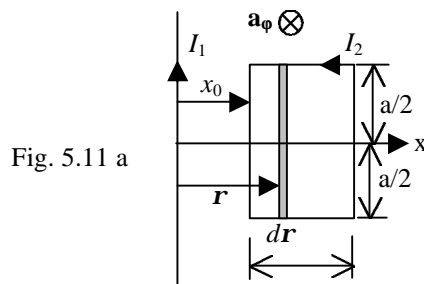
$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -dU_m$$

$$\mathbf{F} = -\nabla U_m \Big|_{\Lambda=cte} \quad (5.12)a$$

$$\tau = -\frac{\partial U_m}{\partial q} \Big|_{\Lambda=cte} \quad (5.12)b$$

### Ejemplo 5.8:

Una bobina compacta tiene N espiras, corriente  $I_2$  y se ubica en el mismo plano que un conductor unifilar infinito con corriente  $I_1$ . Hallar la fuerza sobre la bobina y el torque alrededor del eje x



Calculemos la energía magnética según ec. 5.3

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

$$\text{luego: } \mathbf{F} = +\nabla U_m \Big|_{I_1, I_2=cte}$$

como  $L_1 = L_2 = cte$ , entonces:

$$\nabla U_m = I_1 I_2 \nabla M$$

cálculo de M:  $\mathbf{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2pr} \mathbf{a}_\phi$

$$\Phi_{21} = \int_{r=x_0}^{x_0+b} \frac{\mu_0 I_1}{2pr} \mathbf{a}_\phi \cdot (ad \mathbf{r} \mathbf{a}_\phi) = -\frac{\mu_0 I_1 a}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

$$\Lambda_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 N a}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

$$M = \frac{d\Lambda_{21}}{dI_1} = -\frac{\mu_0 N a}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

Para evaluar  $\nabla U_m$  debemos expresar  $M$  como una función de  $x$  y luego reemplazar  $x = x_0$ :

$$M_{(x)} = -\frac{\mu_0 N a}{2p} \ln \frac{x+b}{x}$$

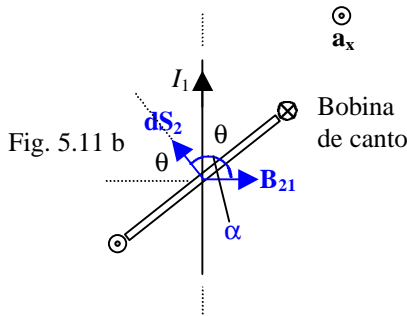
$$\mathbf{F} = +\nabla U_m = +I_1 I_2 \frac{dM}{dx} \mathbf{a}_x = \frac{\mu_0 N a b I_1 I_2}{2p x(x+b)} \mathbf{a}_x$$

$$\mathbf{F}|_{x=x_0} = \frac{\mu_0 N a b I_1 I_2}{2p x_0(x_0+b)} \mathbf{a}_x \text{ fza. de repulsión}$$

Nota: es la misma que se calcularía usando:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Para hallar el torque suponemos un giro de la bobina alrededor del eje  $x$ :



De la fig:  $\cos a = -\cos q$

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \mathbf{B}_{21} \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S_2} B_{21} \cos a dS_2$$

$$\Phi_{21} = -\frac{\mu_0 I_1 a}{2p} \cos q \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

$$\Lambda_{21} = -\frac{\mu_0 N I_1 a \cos q}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

$$M = \frac{d\Lambda_{21}}{dI_1} = -\frac{\mu_0 N a \cos q}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0} = M(q)$$

$$\tau = +\frac{dU_m}{dq} = I_1 I_2 \frac{dM}{dq} = \frac{\mu_0 N I_1 I_2 a \sin q}{2p} \ln \frac{x_0+b}{x_0}$$

El signo (+) indica en el mismo sentido de  $\theta$

### 5.6.1 Expresiones particulares para $U_m$ :

Para el cálculo de fuerzas, conviene en ciertos casos modelar a la parte del sistema sobre la cual se determina tal fuerza como se indica a continuación:

i) Dipolo en campo externo: Si la parte del sistema mencionado puede caracterizarse por un

$\mathbf{m}$ , en un campo  $\mathbf{B}$  que no depende de aquella, entonces:  $U_m = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$  (5.13)e

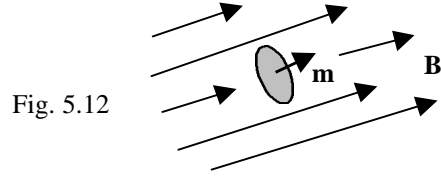


Fig. 5.12

### Ejemplo 5.9:

Una espira circular de radio  $a$  ( $L = 0$ , resistencia  $R$ ) está en el plano  $z = 0$ . Un imán de volumen  $V$  y magnetización  $M_0$  se aleja de la espira a lo largo del eje  $z$  con velocidad cte. Hallar

- (a) corriente en la espira
- (b)  $\mathbf{m}$  de la espira
- (c) fuerza de interacción

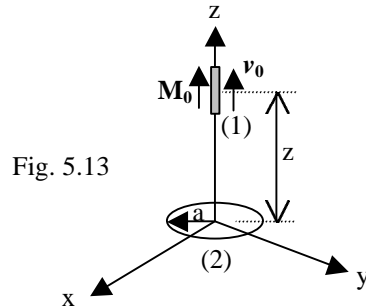


Fig. 5.13

Asumiendo  $z$  grande comparada con el imán y la espira usaremos una aproximación dipolar (ver cap. 1):

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4p} \left[ \frac{\mathbf{m}_1}{R^3} + \frac{3\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}}{R^5} \mathbf{R} \right] \quad \mathbf{R} = -z\mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{M}_0 V = M_0 V \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{\mu_0}{4p} \left[ \frac{M_0 V \mathbf{a}_z}{z^3} + \frac{3(M_0 V \mathbf{a}_z) \cdot (-z\mathbf{a}_z)}{z^5} (-z\mathbf{a}_z) \right]$$

$$\mathbf{B}_{21} = \frac{\mu_0 M_0 V \mathbf{a}_z}{2p z^3} = \frac{\mu_0 \mathbf{m}_1}{2p z^3}$$

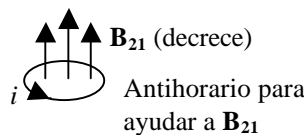
(a) Flujo total en la espira:

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = \mathcal{L}i + B_{21} S_2 = \frac{\mu_0 M_0 V}{2p z^3} (p a^2)$$

$$|fem_2| = \left| \frac{d\Phi_2}{dt} \right| = \frac{3\mu_0 M_0 V a^2}{2z^4} \frac{dz}{dt} = \frac{3\mu_0 M_0 V a^2}{2z^4} v_0$$

$$i = \frac{|fem_2|}{R} = \frac{3\mu_0 M_0 V a^2 v_0}{2R z^4}$$

El sentido de  $i$  se calcula por la ley de Lenz:



(b) por definición:  $\mathbf{m}_2 = i \mathbf{S}_2 = i(p a^2 \mathbf{a}_z) =$

$$\mathbf{m}_2 = \frac{3\mathbf{m}_0 M_0 V a^4 v_0}{2Rz^4} \mathbf{a}_z$$

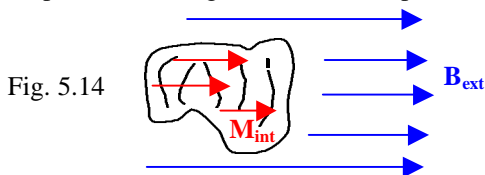
(3) De la ec. 5.13, considerando que la espira no influye en el campo del imán:  $U_m = \mathbf{B}_{21} \cdot \mathbf{m}_2$  energía de la espira en el campo del imán.

$\mathbf{F}_{21} = -\nabla U_m$  (no hay fuentes independientes de *fem*)

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{dU_m}{dz} \mathbf{a}_z = -\frac{d}{dz} \left[ \frac{3(\mathbf{m}_0 M_0 V)^2 a^4 v_0}{2Rz^7} \right] \mathbf{a}_z$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{21(\mathbf{m}_0 M_0 V)^2 a^4 v_0}{4Rz^8} \mathbf{a}_z \text{ (atracción, ver fig. 5.13), por la ley de newton: } \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \text{ la calidad de la fuerza confirma la ley de Lenz}$$

ii) Cuerpo material magnetizable en campo externo:



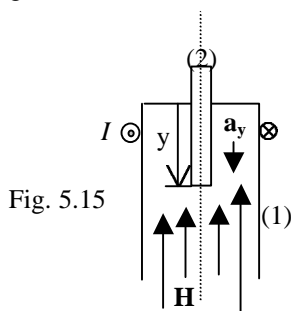
$\mathbf{M}_{int}$  es la  $\mathbf{M}$  inducida por el  $\mathbf{B}_{ext}$

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{cuerpo} \mathbf{B}_{ext} \cdot \mathbf{M}_{int} dV \quad \mathbf{F} = +\nabla U_m \text{ (5.14)b}$$

**Ejemplo 5.10:**

Levitación magnética: Se tiene un solenoide con corriente  $I$ ,  $n$  espiras por unidad de longitud, con su eje vertical. Dentro de éste se introduce una barra cilíndrica delgada de radio  $a$ , de material diamagnético. Hallar:

- (a) Fuerza magnética en la barra
- (b)  $I$  para equilibrar el peso de la barra (densidad  $\delta$  y longitud  $d$ )



Campo creado por el solenoide:  $\mathbf{H}_1 = -nI\mathbf{a}_y$  (ver capítulo 1), como la barra es delgada, entonces las condiciones de contorno en la superficie lateral de la barra establecen:  $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 = -nI\mathbf{a}_y$

Por teorema del capítulo 2:

$$\mathbf{M}_2 = (k_m - 1)(-nI\mathbf{a}_y)$$

(a) de la ec. 5.14 a:  $U_m = \frac{1}{2} \int_{barra} \mathbf{B}_{ext} \cdot \mathbf{M}_{int} dV$

donde:  $\mathbf{B}_{ext} = -\mathbf{m}_0 n I \mathbf{a}_y$      $\mathbf{M}_{int} = (k_m - 1)(-nI\mathbf{a}_y)$

Solo se incluye el volumen donde  $\mathbf{B} \neq 0$ ; así:

$$U_m = \frac{1}{2} (k_m - 1) \mathbf{m}_0 (nI)^2 (\mathbf{p} a^2 y)$$

De la ec. 5.14 b:

$$\mathbf{F} = +\nabla U_m = \frac{dU_m}{dy} \mathbf{a}_y = \frac{1}{2} (k_m - 1) \mathbf{m}_0 (nI)^2 (\mathbf{p} a^2) \mathbf{a}_y$$

Como el cuerpo es diamagnético  $(k_m - 1) < 0$ , así  $\mathbf{F}$  está dirigido hacia arriba, la barra es repelida fuera del solenoide.

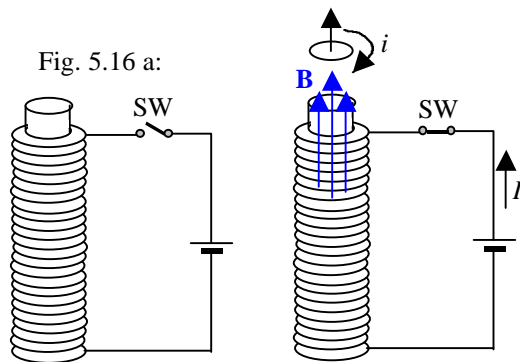
(b) Para equilibrar el peso de la barra:

$$\frac{1}{2} \mathbf{m}_0 (1 - k_m) \mathbf{p} a^2 (nI)^2 = \mathbf{d} g \mathbf{p} a^2 d$$

$$I = \left[ \frac{2d g d}{\mathbf{m}_0 n^2 (1 - k_m)} \right]^{1/2}$$

**5.6.2 Diversas aplicaciones de la fuerza por interacción magnética:**

Demostración experimental de la ley de Lenz



Inicialmente el electromagneto no tiene corriente y el flujo magnético a través del anillo es cero.

Al cerrar el SW aparece  $i$  en el conductor en sentido tal que se opone a  $\mathbf{B}$  de  $I$  y la fuerza  $F$  repele al anillo; si en éste se practica un corte radial no existiría " $i$ " y el anillo queda en reposo (ver ejemplo 5.4 considerando que el imán se acerca a la espira)

Levitación de magnetos permanentes sobre materiales superconductores.

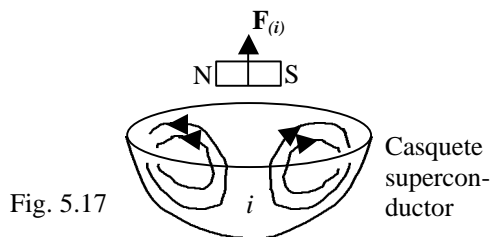


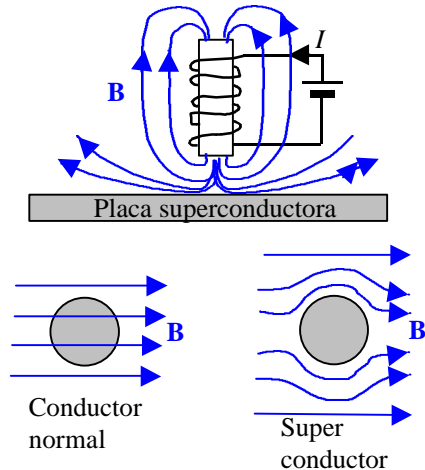
Fig. 5.17

El imán queda suspendido en el aire sobre el casquete superconductor debido a la interacción con las corrientes

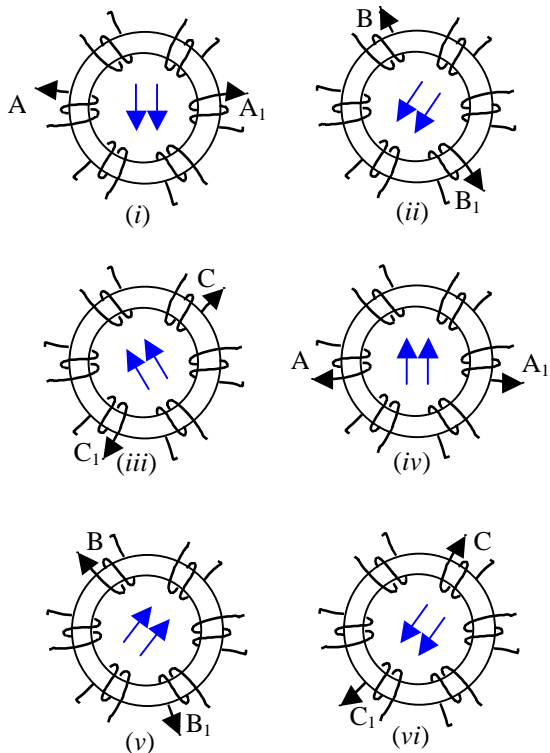
tes  $i$  de Foucault inducidas en éste (ver ejemplo 5.9 considerando  $R \rightarrow 0$ )

Nota a la fig 5.17:

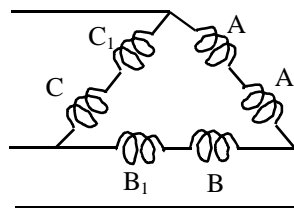
En los superconductores el flujo magnético no puede penetrar y el campo tiene el aspecto que se muestra (Efecto Meissner) Ver 3.6



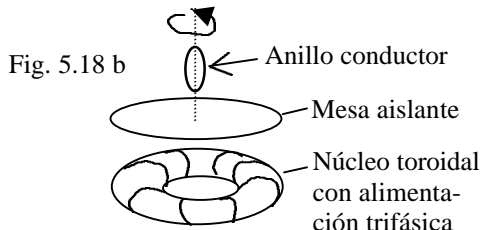
Campo magnético giratorio: Fig 5.18 a



Se muestra un núcleo toroidal de Fe con un arreglo de 6 bobinas; las bobinas alimentan por pares secuencialmente en el tiempo con corriente continua  $I$  en (i), (ii) y (iii), en (iv), (v) y (vi) la corriente  $I$  invierte su sentido. Sí este proceso se efectúa con una transición continua entre cada estado el resultado es un campo  $B$  giratorio, para ello se utiliza corriente trifásica (una de las ventajas de tal corriente es la posibilidad de generar este tipo de  $B_0$ )



Si se coloca un conductor en el espacio donde existe  $B$  éste experimenta un torque y gira.



La velocidad de rotación del anillo es diferente de la velocidad de rotación de  $B$  (deslizamiento)  
El anillo conductor gira alrededor del eje vertical por acción del  $B$  rotatorio (principio del motor de inducción trifásico)  $\hat{\omega} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$  hasta que  $\mathbf{m}$  sea paralelo a  $\mathbf{B}$ , pero como  $\mathbf{B}$  gira esto no sucede y el giro se mantiene

Motor de inducción monofásico de polo blindado: (shaded-pole)

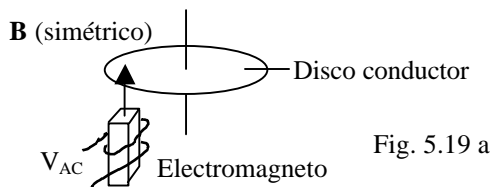


Fig. 5.19 a

El  $B_{(t)}$  del electromagneto con AC monofásica produce corrientes de Foucault, pero por ser simétrico el torque es nulo (el disco se calienta)

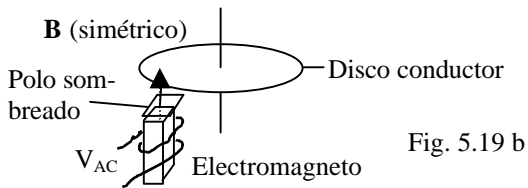


Fig. 5.19 b

El  $B$  asimétrico resultante por acción de la placa conductora cubriendo media cara del polo equivale a un imán que se desplaza de la zona "no blindada" a la blindada. El torque neto así generado hace girar al disco conductor.

**Ejemplo 5.11: Uso de electromagnetos para levantar pesos:**

El núcleo en forma de U posee  $\mu \rightarrow \infty$ ; la armadura está unida a la carga (también posee  $\mu \rightarrow \infty$ ) Sección del gap<sub>1</sub> = 2S, sección del gap<sub>2</sub> = S



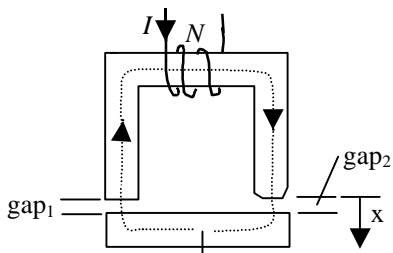


Fig. 5.20 a  
Peso a  
levantar

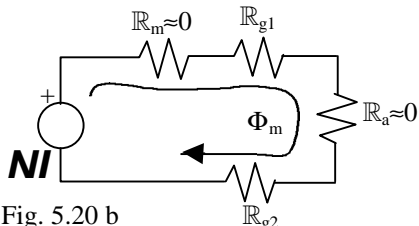


Fig. 5.20 b

$$\Phi_m = \frac{NI}{(\mathbb{R}_{g1} + \mathbb{R}_{g2})}$$

$$\mathbb{R}_{g1} = \frac{x}{2\mathbf{m}_0 S} \quad \mathbb{R}_{g2} = \frac{x}{\mathbf{m}_0 S}$$

$$\therefore \Phi_m = \frac{2S\mathbf{m}_0 NI}{3x}$$

De la ec. 5.7 b:

$$U_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mathbf{m}} V = \frac{1}{2} \frac{(\Phi_m / S)^2 SL}{\mathbf{m}} = \frac{\Phi_m}{2} \left[ \frac{L}{S\mathbf{m}} \right]$$

$$U_m = \frac{1}{2} \Phi_m^2 \mathbb{R}$$

$$\text{gap1: } U_{m1} = \frac{(NI)^2 S \mathbf{m}_0}{9x} = \frac{\Phi_m^2 x}{4\mathbf{m}_0 S}$$

$$\text{gap2: } U_{m2} = \frac{2(NI)^2 S \mathbf{m}_0}{9x} = \frac{\Phi_m^2 x}{2\mathbf{m}_0 S}$$

De ec 5.11a:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= + \frac{dU_{m1}}{dx} \mathbf{a}_x = - \frac{(NI)^2 S \mathbf{m}_0}{9x^2} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{F}_2 &= + \frac{dU_{m2}}{dx} \mathbf{a}_x = - \frac{2(NI)^2 S \mathbf{m}_0}{9x^2} \mathbf{a}_x \end{aligned} \right\} \text{Para } I = \text{cte}$$

De ec. 5.12a:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= - \frac{dU_{m1}}{dx} \mathbf{a}_x = - \frac{\Phi_m^2}{4\mathbf{m}_0 S} \mathbf{a}_x \\ \mathbf{F}_2 &= - \frac{dU_{m2}}{dx} \mathbf{a}_x = - \frac{\Phi_m^2}{2\mathbf{m}_0 S} \mathbf{a}_x \end{aligned} \right\} \text{Para } \Phi_m = \text{cte}$$

Notar que el polo cónico ejerce una fuerza doble; si el peso es incrementado cede primero el polo común.